Повторение по тч

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных делителей числа $n!$.

2. На доске записано натуральное число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 17, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 13^{2023}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2023^{13}?

3. Существуют ли рациональные числа p, q, r, такие, что $p + q + r = 0$ и $pqr = 1$?

4. Найдите все натуральные числа a, n, такие, что число $\dfrac{(a+1)^n - a^n}{n}$ - натуральное.

5. Двое играют в игру. Они по очереди выбирают 7 различных цифр от 1 до 9 (первый — четыре цифры, второй — три). Из них составляется по порядку выбора семизначное число A (первая выбранная цифра - первая цифра A). Первый побеждает, если A - последние 7 цифр десятичной записи седьмой степени некоторого числа. Кто из игроков имеет выйгрышную стратегию?

6. Найдите все натуральные числа a, b, такие, что $b^a | a^b - 1$.

7. Найдите все натуральные числа n, такие, что $n^4 - n^3 + 3n^2 + 5$ - точный квадрат.

8. Найдите все сюрьективные функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такие, что для любых натуральных чисел m, n и любого простого p верно: $p | f(m+n) \iff p | f(m) + f(n)$.

9. Докажите, что для любых натуральных чисел m, n существует натуральное число c, такое, что cm, cn имеют одинаковый набор (считая повторения) ненулевых цифр.