По следам кубка Колмогорова

1. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольнике 6×20 таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 2×3 и 3×2 была отмеченная клетка?

2. На конференции четыре официальных языка. Любые два участника конференции могут общаться друг с другом без переводчика на одном из официальных языков. Докажите, что одним из языков владеет не менее 60% участников конференции.

3. У детей есть шарики десяти различных цветов и 120 коробок. Дети положили в каждую коробку по три шарика трёх различных цветов. Оказалось, что в любых двух коробках лежат разные наборы цветов. Учитель хочет написать на каждой коробке цвет одного из шариков, лежащих в ней, таким образом, чтобы дети, видя эти 120 надписей, смогли хотя бы про одну коробку с уверенностью сказать, шарики каких трёх цветов в ней лежат. Сможет ли он это сделать?

4. В сильно связном ориентированном графе любые две вершины соединены не более чем одним ребром и из каждой вершины выходит хотя бы два ребра. Докажите, что можно удалить вершину (вместе со всеми входящими в нее и выходящими из нее ребрами) без потери сильной связности.

5. В начале игры есть пустая клетчатая доска 10×11. Петя и Вася ходят по очереди, первым ходит Петя. За ход Петя ставит по фишке в две пустых клетки, имеющих хотя бы одну общую вершину, а Вася ставит фишку в любую пустую клетку. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Есть **(a)** 4 **(b)** n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза, и каждому из них надевают на голову какой-то колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Мудрецы открывают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается угадать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о совместных действиях таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один из них угадал цвет своего колпака.

7. В таблице $n \times n$ каждая клетка окрашена в красный или синий цвет, причём среди любых четырех клеток, находящихся на пересечении двух строк и двух столбцов, какие-то две клетки, лежащие в одной строке или одном столбце, одноцветны. Докажите, что можно выбрать не менее $n/100$ строк и не менее $n/100$ столбцов этой таблицы таким образом, чтобы все клетки на пересечении этих столбцов с этими строками были одноцветны.