Постулат Бертрана

Теория:

Обозначим за $R(n)$ произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таких нет, считаем произведение равным 1). Обозначим за $\varphi(n)$ количество простых чисел, не больших n.

1. Докажите, что:
 (a) если $2 \leqslant 2n/3 < p \leqslant n$, то C_{2n}^n не делится на p.
 (b) если $p > \sqrt{2n}$, то C_{2n}^n не делится на p^2.
 (c) если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

2. Докажите, что $C_{2n}^n \geqslant \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

3. Докажите, что произведение всех простых чисел от 1 до n не превосходит 4^n.

4. Докажите, что $R(n) > \dfrac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\varphi(\sqrt{2n})}}$.

5. Докажите, что:
 (a) $\varphi(n) \leqslant n/2$.
 (b) $(2n)^{\sqrt{n/2}} < 2^{n/3}$ для $n > 500$.
 (c) $R(n) > 1$ для $n > 500$.

Несложно показать теперь, что $R(n) > 1$ для всех $n \geqslant 2$, из чего немедленно следует ***постулат Бертрана***: $\forall n \geqslant 2$ существует простое число в промежутке $(n; 2n)$.

Практика:

6. Докажите, что для любого натурального числа k существует хотя бы 3 различных простых числа, имеющих ровно k цифр.

7. Докажите, что $p_1 p_2 \ldots p_n > (p_{n+1})^2$, где p_n - n-ое простое число ($n > 4$).

8. Для любых натуральных чисел m, n докажите, что число $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{m+n}$ не натуральное.

9. Для натурального $n > 3$ определим $f(n)$ как произведение всех простых чисел, меньших n. Найдите все решения уравнения $f(n) = 2n + 16$.

10. Найдите все натуральные n, такие, что для некоторого натурального k верно, что количество натуральных делителей числа $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ равно 2^k.