Постулат Бертрана

Теория:

Обозначим за $R(n)$ произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таких нет, считаем произведение равным 1). Обозначим за $\varphi(n)$ количество простых чисел, не больших n.

1. Докажите, что:
(a) если $2 \leqslant 2n/3 < p \leqslant n$, то C_{2n}^n не делится на p.
(b) если $p > \sqrt{2n}$, то C_{2n}^n не делится на p^2.
(c) если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

2. Докажите, что:
(a) $C_{2n}^n \geqslant \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.
(b) произведение всех простых чисел от 1 до n не превосходит 4^n.
(c) $R(n) > \dfrac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\varphi(\sqrt{2n})}}$.

3. Докажите, что:
(a) $\varphi(n) \leqslant n/2$.
(b) $(2n)^{\sqrt{n/2}} < 2^{n/3}$ для $n > 500$.
(c) $R(n) > 1$ для $n > 500$.

4. Докажите, что для любого натурального k между n и $2n$ содержится хотя бы k простых чисел, для достаточно больших n.

Несложно показать теперь, что $R(n) > 1$ для всех $n \geqslant 2$, из чего немедленно следует ***постулат Бертрана***: $\forall n \geqslant 2$ существует простое число в промежутке $(n; 2n)$.

Практика:

5. Для любых натуральных чисел m, n докажите, что число $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{m+n}$ не натуральное.

6. Найдите наибольшее натуральное число, не представимое в виде суммы различных простых чисел.

7. Найдите наибольшее натуральное число n, такое, что для любого натурального числа $m < \sqrt{n}$ верно, что n делится на m.

8. Докажите, что для любого натурального числа n числа от 1 до $2n$ можно разбить на пары так, что сумма чисел в каждой паре — простое число.

9. Найдите все натуральные n, такие, что для некоторого натурального k верно, что количество натуральных делителей числа НОК$(1, 2, \ldots, n)$ равно 2^k.

10. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), такие, что: $a! + b^b = c!$.