

Разнойбой на дом

1. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Обозначим за H , O и I понятно что. Докажите, что окружность (HOI) проходит через вершину B .
2. Даны правильный треугольник ABC с центром O и точка P , не лежащая на его оси симметрии. Прямые AP , BP и CP пересекают соответственно прямые BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOA_1 , BOB_1 и COC_1 , имеют две общих точки.
3. Дан угол с вершиной O . Постройте на сторонах угла точки A и B , а внутри него — точку C так, чтобы периметр ломаной ACB равнялся 1, а площадь S_{OACB} была наибольшей возможной.
4. На окружности ω фиксированы точки B и C , а на одной из дуг выбирается переменная точка A . Биссектрисы AA_1 и BB_1 этого треугольника пересекаются в точке I , а прямые CI и A_1B_1 — в точке T . Докажите, что прямые AT пересекаются в одной точке.
5. Точка M — середина стороны BC треугольника. Точки D и E на отрезках AB и AC таковы, что окружность (DAE) касается BC в точке M . Точки P и Q — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что окружности (DAE) и (PMQ) касаются.
6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . В треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами I_A и I_C . Точки X , Y на ω таковы, что прямая XY касается обеих вписанных окружностей, причем отрезки $I_A B$ и $I_C B$ ее пересекают. Докажите, что четырехугольник $XI_A I_C Y$ — вписанный.