

Вы любите рисовать?

Комбинаторика

1. Лунтик с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на Вишнёвый холм, а на следующий день спускался с холма с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его не обязательно была постоянной, иногда он останавливался или возвращался назад. Докажите, что в каком-то месте дороги он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.
2. Петя задумал двузначное число. За одну попытку Вася называет двузначное число. Если каждая из цифр Васиного числа отличается не более чем на 1 от стоящей на том же месте цифры Петиного числа, то Вася выиграл. За какое наименьшее число попыток Вася может гарантированно выиграть?
3. В эстафетном забеге Москва-Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается.
4. На поле 100×100 двое по очереди передвигают каждый свою фишку на соседнюю по стороне клеточку доски. Первый выигрывает, если после его хода отрезок, что соединяет центр клеточки его фишки с центром доски, станет перпендикулярным отрезку, что соединяет центр клеточки фишки противника также с центром доски. Докажите, что первый всегда может выиграть, если в начале игры их фишки стоят в противоположных углах доски.

Не комбинаторика

5. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x - 1)^2 + 4}$.
6. Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

7. Для каждой грани многогранника провели вектор, перпендикулярный ей, смотрящий вовне, длина которого численно равна площади этой грани. Докажите, что сумма указанных векторов равна нулю.