

Вы любите рисовать?

Комбинаторика

1. Петя задумал двузначное число. За одну попытку Вася называет двузначное число. Если каждая из цифр Васиного числа отличается не более чем на 1 от стоящей на том же месте цифры Петиного числа, то Вася выиграл. За какое наименьшее число попыток Вася может гарантированно выиграть?
2. Имеются три бассейна. Из первого с постоянной скоростью выливается вода, а во второй и третий бассейны вода поступает с постоянными скоростями. Изначально в первом бассейне было столько же воды, сколько в двух других в сумме; через некоторое время во втором бассейне стало столько же воды, сколько в двух других в сумме; ещё через какое-то время в третьем бассейне стало столько же воды, сколько в первых двух в сумме. Возможно ли, что ни в начале, ни в конце этого промежутка времени ни один из бассейнов не был пустым?
3. В эстафетном забеге Москва-Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается.
4. На поле 100×100 двое по очереди передвигают каждый свою фишку на соседнюю по стороне клеточку доски. Первый выигрывает, если после его хода отрезок, что соединяет центр клеточки его фишки с центром доски, станет перпендикулярным отрезку, что соединяет центр клеточки фишки противника также с центром доски. Докажите, что первый всегда может выиграть, если в начале игры их фишки стоят в противоположных углах доски.

Не комбинаторика

5. Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

6. Для каждой грани многогранника провели вектор, перпендикулярный ей, смотрящий вовне, длина которого численно равна площади этой грани. Докажите, что сумма указанных векторов равна нулю.
7. Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b^2 + bc + c^2 = 3 \\ c^2 + ac + a^2 = 4 \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.