Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n через $ord_p(n)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в n, то есть максимальную степень числа p, на которую делится n.

Лемма об уточнении показателя (LTE-лемма). Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда

$$ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a - b) + ord_p(k).$$

Условие 1: $p \neq 2$ и $a - b$ делится на p.
Условие 2: $p = 2$ и $a - b$ делится на 4.

Следствие. Пусть k — нечетное, p — простое, a, b не делятся на p и $a + b$ делится на p. Тогда $ord_p(a^k + b^k) = ord_p(a + b) + ord_p(k)$.

1. **(a)** Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a - b)$.
(b) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a - b)$, если s не кратно p.
(c) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a - b) + ord_p(k)$.
(d) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a - b) + 1$.
(e) Докажите лемму об уточнении показателя.
(f) Докажите следствие.

2. Найдите наименьшее простое p такое, что $2^{120!} - 1$ делится на p, но не делится на p^2.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

4. Найти максимальное $k \in \mathbb{N}$, такое что $1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}$ делится на 1991^k.

5. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

6. **(a)** Докажите, что для любого натурального $a > 2$ найдется такое натуральное $n > 1$, что $a^n - 1$ делится на n^2.
(b) Верно ли это утверждение для $a = 2$?

7. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких что $1^n + 2^n + \ldots + k^n$ делится на n.

8. Найдите все натуральные n, для которых существуют такие натуральные числа x, y, k, что $(x, y) = 1$, $k > 1$ и $3^n = x^k + y^k$.

9. Решите в натуральных числах уравнение $a^b + 1 = (a + 1)^c$.