Неравенство КБШ

Напомним, что неравенством КБШ называется следующее неравенство.
КБШ. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ верно следующее неравенство:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2.$$

Равенство достигается, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.
Также полезно знать следующую вариацию данного неравенства.
КБШ в виде дробей. Для вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Равенство достигается, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Задачи для решения

1. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

2. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}.$$

3. Докажите, что для любых неотрицательных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leqslant 2(x + y + z).$$

4. Докажите, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2 + \left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right)^2}.$$

5. Даны действительные числа $x, y, z \geqslant 1$ такие, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x + y + z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

6. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leqslant 1.$$

7. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Доказать, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Докажите, что для любых положительных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

9. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geqslant 1.$$