Синусы и простые отношения

Опр. Простым отношением тройки точек(лежащих на одной прямой) называется величина:

$$(AB, P) = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}.$$

Опр. Простым отношением угла $\angle AXB$ и прямой l ($X \in l$) назовем величину:

$$(\angle AXB, l) = (\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, l) = \frac{\sin\angle(\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{l})}{\sin\angle(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{XB})}, \qquad (1)$$

где $\vec{l}$ — направляющий вектор прямой l.

Углы в формуле (1) понимаются как **ориентированные** углы, то есть углы между векторами. Угол $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ это тот, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\vec{a}$, чтобы получить $\vec{b}$.

Теорема Чевы в триг. форме. Пусть есть треугольник ABC и точки A_1, B_1 и C_1 на прямых BC, AC и AB соответственно. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются тогда и только тогда, когда

$$(\angle ABC, BB_1) \cdot (\angle BCA, CC_1) \cdot (\angle CAB, AA_1) = 1.$$

Все задачи принимаются ТОЛЬКО счетом в простых отношениях.

Задачи по пунктам НЕ принимаются.

1. **(a)** Докажите, что определение простого отоношения корректно, то есть не зависит от выбора направления вектора $\vec{l}$ и выбора точек A и B на сторонах угла.

   (b) Как связаны простые отношения $(\angle AXB, l)$ и $(\angle BXA, l)$?

   (c) Пусть дан угол $\angle AXB$ и произвольная точка P на прямой AB. Докажите соотношение
   $$(A; B; P) = \frac{AX}{XB} \cdot (\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, XP), \qquad (2)$$
   которое связывает простое отношение тройки точек с простым отношением тройки прямых.

   (d) Докажите, что для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ и фиксированного угла $\angle AXB$ существует ровно одна прямая l такая, что $X \in l$ и $(\angle AXB, l) = \alpha$.

2. В треугольник ABC вписан квадрат, одна из его сторон лежит на стороне AB , а другие две вершины — по одной на других сторонах треугольника. Обозначим через C_1 точку пересечения диагоналей квадрата. Точки A_1, B_1 определяются аналогично. Доказать, AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

3. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Известно $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Докажите, что AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

4. Пусть дана ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ такая, что точки A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_6 лежат на одной окружности.

   (a) Пусть отрезки A_1A_2 и A_4A_5 пересекаются в точке Y; отрезки A_1A_6 и A_3A_4 пересекаются в точке X; отрезки A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

   (b) Теорема Паскаля. Пусть прямые A_1A_2 и A_4A_5 пересекаются в точке Y; прямые A_1A_6 и A_3A_4 пересекаются в точке X; прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

5. **Лемма об изогоналях.** Пусть OB и OC — изогонали угла AOD (изогонали угла — это прямые проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы). Пусть $AC \cap BD = Q$ и $AB \cap CD = P$. Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD.

6. Пусть I — центр вписанной окружности описанного четырехугольника $ABCD$. Пусть лучи AB и DC пересекаются в P, лучи BC и AD — в Q. На отрезках BI и DI взяты точки X и Y так, что $\angle XPY = \frac{1}{2}\angle APD$.

   (a) Докажите, что
$$\frac{BP \cdot PD}{PI^2} = \frac{BX \cdot DY}{XI \cdot IY}.$$

   (b) Докажите, что $\angle XQY = \frac{1}{2}\angle AQB$.

7. **Теорема Паппы.** Пусть A_1, B_1 и C_1 точки на прямой l_1, A_2, B_2 и C_2 — точки на прямой l_2. Докажите, что точки $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $C_1B_2 \cap C_2B_1$ и $A_1C_2 \cap A_2C_1$ лежат на одной прямой.

8. **Теорема Дезарга.** Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой.