Комбинаторный разнобой

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 668.

2. В параллели школы разносторонней развитости учатся 100 школьников. В этой школе 5 художественных кружков и 4 спортивных, в каждый ходит хотя бы один школьник. Каждый школьник ходит в один художественный кружок и один спортивный. Докажите, что найдется такой школьник, вместе с которым в художественном кружке занимается меньше человек, чем в спортивном.

3. Петя и Вася по очереди красят рёбра N-угольной пирамиды: Петя — в красный цвет, а Вася — в зелёный (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все рёбра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведёт ломаная, состоящая из зелёных рёбер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

4. Строго внутри прямоугольника отмечено n точек таким образом, что никакая прямая, проходящая через пару этих точек, не параллельна сторонам прямоугольника. Потом прямоугольник разбили на m прямоугольников поменьше таким образом, что ни одна из отмеченных точек не оказалась строго внутри маленького прямоугольника. Докажите, что $m \geqslant n+1$.

5. В государстве 100500 городов, каждые два соединены либо автобусным, либо железнодорожным маршрутом. Регион — это любое непустое множество, состоящее не более, чем из 50250 городов. Автобусная мобильность региона определяется как отношение числа автобусных маршрутов, идущих из городов региона в города вне региона, к количеству городов в регионе. Железнодорожная мобильность региона определяется аналогично. Пусть A — наименьшая из автобусных мобильностей регионов государства, а B — наименьшая из их железнодорожных мобильностей. Какое наименьшее значение может принимать число $A+B$?

6. В городе есть несколько мальчиков и девочек, некоторые пары знакомы. Оказалось, что в любом множестве D из 8 девочек найдётся (возможно, пустое) подмножество D' такое, что любой мальчик, знакомый со всеми девочками из D', знаком ещё хотя бы с одной девочкой из D. Докажите, что в любом множестве M из 300 мальчиков найдётся (возможно, пустое) подмножество M' такое, что любая девочка, знакомая со всеми мальчиками из M', знакома ещё хотя бы с одним мальчиком из M.

7. На окружности завфиксировано $2n$ различных точек, $n \geqslant 1$. Их разбили на пары и соеднили точки в каждой паре стрелкой. Полученная кофигурация называется хорошей, если в ней никакие две стрелки не пересекаются и нет двух стрелок AB и CD, ориентированных таким образом, что в $ABCD$ стороны ориентированы по часовой стрелке. Сколько существует хороших конифигураций?