Алгебраический разнобой

1. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависет от k, но должен быть всегда больше 1.)

2. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $\dfrac{1}{n+1}$.

3. Даны натуральные числа n и k, где $n > k$. Докажите, что если одно из уравнений $x^n + y^n = z^k$ и $x^n + y^n = z^{n-k}$ имеет решение в натуральных числах, то и другое — тоже.

4. Барон Мюнхгаузен придумал следующую лемму. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от n переменных, принимающих положительные значения. Тогда, если сумма переменных фиксирована, то при равенстве всех переменных достигается либо максимум, либо минимум многочлена. Верна ли лемма, если: **(a)** $n \geqslant 3$; **(b)** $n = 2$?

5. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых $(n-1)^2 < f(n) \cdot f(f(n)) < n^2 + n$ для всех натуральных n.

6. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней с учетом кратностей; $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{2017} P(x+i)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.