Алгебраический разнобой

1. Даны натуральные числа n и k, где $n > k$. Докажите, что если одно из уравнений $x^n + y^n = z^k$ и $x^n + y^n = z^{n-k}$ имеет решение в натуральных числах, то и другое — тоже.

2. Барон Мюнхгаузен придумал следующую лемму. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от n переменных, принимающих положительные значения. Тогда, если сумма переменных фиксирована, то при равенстве всех переменных достигается либо максимум, либо минимум многочлена. Верна ли лемма, если: **(a)** $n \geqslant 3$; **(b)** $n = 2$?

3. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых $(n-1)^2 < f(n) \cdot f(f(n)) < n^2 + n$ для всех натуральных n.

4. Найдите наибольшее k такое, что любые положительные числа, удовлетворяющие неравенству $a^2 > bc$, удовлетворяют также неравенству $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$.

5. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней с учетом кратностей; $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{2017} P(x+i)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.

6. Ненулевой многочлен $P(x)$ имеет рациональные коэффициенты и не раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами. Докажите, что никакие три его комплексных корня не образуют арифметическую прогрессию.
Указание: три числа образуют арифметическую прогрессию, если одно из них является полусуммой двух других.