

## Теорема ван дер Вардена и прочие раскраски

1. Докажите, что натуральный ряд можно покрасить в два цвета так, что не найдётся бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.
2.
  - а) Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.
  - б) То же самое для 3 цветов.
  - с) То же самое для  $r$  цветов (оцените размеры куска плоскости, который достаточно рассмотреть).
3.
  - а) Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся квадрат, стороны которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.
  - б) То же самое для  $r$  цветов.

**Теорема ван дер Вардена.** Для любых натуральных  $r, k$  существует такое число  $W(k, r)$ , что при любой раскраске чисел  $1, 2, \dots, W(k, r)$  в  $r$  цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины  $k$ .

**Упрощённая теорема.** При любой раскраске чисел натурального ряда в  $r$  цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины  $k$ .

4.
  - а) **Лемма Кёнига о компактности.** Докажите, что в любом бесконечном дереве с конечными степенями вершин есть бесконечный путь.
  - б) Докажите, что теорема ван дер Вардена следует из упрощённой теоремы.
5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  такая, что  $a_{i+1} - a_i < 2023$  для любого  $i$ . Из теоремы ван дер Вардена выведите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.
6. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены целые числа. Докажите, что найдётся квадрат, стороны которого идут по линиям сетки и сумма чисел внутри которого делится на 2023.
7. Назовём множество арифметических прогрессий последовательным, если их длины равны, разности совпадают, а первые члены — последовательные натуральные числа. Докажите, что при любой покраске натурального ряда в 10 цветов найдутся 100 последовательных одноцветных арифметических прогрессий длины 1000.