

Теорема ван дер Вардена и прочие раскраски

1. Докажите, что натуральный ряд можно покрасить в два цвета так, что не найдётся бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.
2.
 - а) Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.
 - б) То же самое для 3 цветов.
 - с) То же самое для r цветов (оцените размеры куска плоскости, который достаточно рассмотреть).
3.
 - а) Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся квадрат, стороны которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.
 - б) То же самое для r цветов.

Теорема ван дер Вардена. Для любых натуральных r, k существует такое число $W(k, r)$, что при любой раскраске чисел $1, 2, \dots, W(k, r)$ в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k .

Упрощённая теорема. При любой раскраске чисел натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k .

4.
 - а) Докажите упрощённую теорему.
 - б) Докажите, что теорема ван дер Вардена следует из упрощённой теоремы.
5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $a_{i+1} - a_i < 2023$ для любого i . Из теоремы ван дер Вардена выведите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.
6. Назовём множество арифметических прогрессий последовательным, если их длины равны, разности совпадают, а первые члены — последовательные натуральные числа. Докажите, что при любой покраске натурального ряда в 10 цветов найдутся 100 последовательных одноцветных арифметических прогрессий длины 1000.
7. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в n цветов.
 - (а) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, на пересечении которых стоят клетки одного цвета.
 - (б) Докажите, что можно дополнительно ещё потребовать, чтобы все строки отстояли друг от друга на одинаковом расстоянии k , а столбцы — на одинаковом расстоянии l .