Очный отбор

1. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2023})) = 0$?

Ответ: Не существует.

Решение:

Предположим, что такой многочлен существует. Тогда $f(\sqrt{2023})$ — его корень.

Пусть $a = f(\sqrt{2023})$; b таково, что

$$\frac{f(x)}{x-a} = x - b.$$

Тогда по теореме Виета

$$p = -a - b; \quad q = ab.$$

По определению a

$$2023 + \sqrt{2023}p + q = a,$$

следовательно число $c = a - p\sqrt{2023}$ — целое.

Имеем:

$$b = -a - p = -c - p - p\sqrt{2023} \quad \Rightarrow$$
$$ab = -c^2 - p^2 2023 - 2pc\sqrt{2023} - pc - p^2\sqrt{2023} = q \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$
$$2pc + p^2 = p(2c + p) = 0.$$

Последнее равенство возможно либо если $p = 0$, либо если $2c + p = 0$. Разберем два случая.

I случай. $p = 0$. Тогда $q \leqslant 0$ (иначе у $f(x)$ нет корней) и

$$f(x) = (x + \sqrt{-q})(x - \sqrt{-q}).$$

Так как $f(\sqrt{2023}) = 2023 + q = \pm\sqrt{-q}$, то $r = \sqrt{-q} \in \mathbb{Z}$. Получаем

$$r^2 \pm r - 2023 = 0,$$

но ни у одного из этих уравнений нет целых корней, так как дискриминант $D = (\pm 1)^2 + 8092$, и $89^2 = 7921 < 8093 < 8100 = 90^2$.

II случай. $2c + p = 0$. Тогда

$$a = c - 2c\sqrt{2023}; \quad b = c + 2c\sqrt{2023} \quad \Rightarrow$$
$$q = ab = c^2(1 - 8092).$$

Тогда

$$f(\sqrt{2023}) = 2023 - 2c\sqrt{2023} - 8091c^2 = a = c - 2c\sqrt{2023} \quad \Rightarrow \quad 8091c^2 + c - 2023 = 0.$$

Но у этого уравнения нет целых корней, так как дискриминант $D = 1 + 8091 \cdot 8092$, и $8091^2 < D = 1 + 8091 \cdot 8092 < 8092^2$.

Мы показали, что оба случая невозможны. Следовательно, такого многочлена f не существует.

2. На факультете лингвистики учатся 40 девушек и 10 юношей. Каждый юноша влюблен либо в точности во всех тех девушек, которые симпатичнее его, либо в точности во всех тех девушек, которые умнее его. Докажите, что у каких-то двух девушек множества поклонников совпадают. *(Про каждых двух студентов можно сказать, кто из них умнее. Если студент A умнее студента B и студент B умнее студента C, то верно, что A умнее C. Такие же свойства выполнены для симпатичности.)*

Решение:

Пусть x юношей любят девушек, которые симпатичнее их. Назовем этих юношей *эстетами*, а оставшихся $10 - x$ юношей — *духовными.*

Расположим всех девушек и всех юношей-эстетов в один ряд по возрастанию симпатичности. Если в этом ряду между двумя девушками нет юношей, то эти две девушки имеют один и тот же набор поклонников-эстетов, а если есть — то разные наборы. Таким образом, x юношей разбивают девушек на $x + 1$ класс; у девушек из одного класса наборы поклонников-эстетов совпадают, а у девушек из разнах классов — различаются.

Таким же образом выстроим всех девушек и $10 - x$ духовных юношей в ряд по возрастанию ума. Аналогично, духовные юноши делят девушек на $11 - x$ классов.

Заметим, что две девушки имеют один и тот же набор поклонников тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же набор духовных поклонников и один и тот же набор поклонников-эстетов. А это происходит тогда и только тогда, когда эти девушки попали в один и тот же класс как в первой расстановке, так и во второй. Всего различных пар классов $(x+1)(11-x) \leqslant 36 < 40$, поэтому у каких-то двух девушек пары классов совпадут.

Примечание. Неравенство $(x+1)(11-x) \leqslant 36$ *легко обосновать, найдя максимум квадратичной функции. Мы приведем другое обоснование. По неравенству о средних*

$$\sqrt{(x+1)(11-x)} \leqslant \frac{(x+1)+(11-x))}{2} = 6.$$

Неравенство о средних применимо, так как $x + 1 > 0$ *и* $11 - x > 0$.

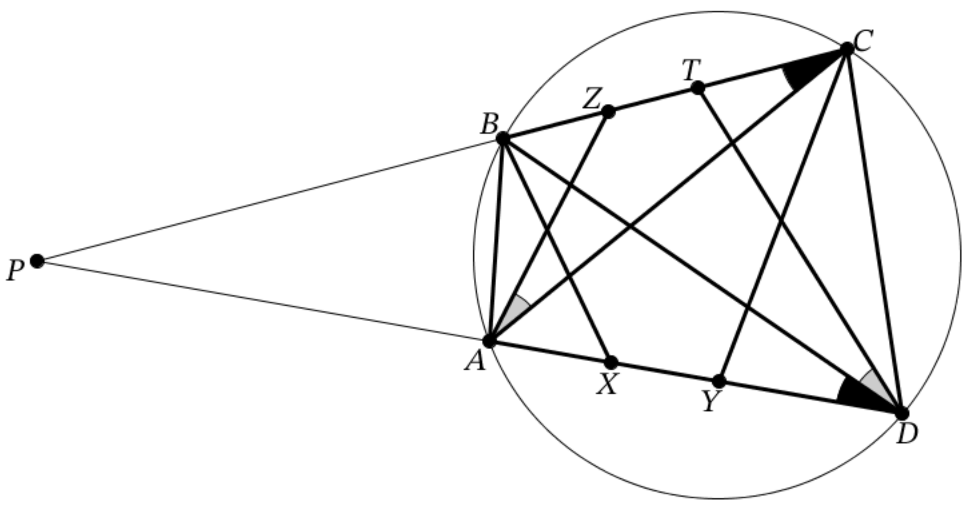
3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Биссектрисы углов ABD и ACD пересекают отрезок AD в двух синих точках; биссектрисы углов BAC и BDC пересекают отрезок BC в двух синих точках. Докажите, что все четыре синие точки лежат на одной окружности.

Решение:

Обозначим за X и Y основания биссектрис из углов B и C, а за Z и T — углов A и D. Заметим, что

$$\angle AZB = \angle CAZ + \angle ACZ = \angle BDT + \angle ADB = \angle ADT.$$

Следовательно, четырехугольник $AZTD$ вписанный. Аналогично и $BXYC$ вписанный.



Отметим точку P — пересечение прямых AD и BC (если они не пересекаются, то утверждение задачи очевидно из симметрии к общему середнинному перпендикуляру отрезков AD и BC). Из свойств степени точки относительно окружности имеем:

$$PX \cdot PY = PB \cdot PC = PA \cdot PD = PZ \cdot PT$$

откуда и следует искомая вписанность.

4. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)!+1=n^k$.

Ответ: $(n,k) \in \{(2,1),(3,1),(5,2)\}$.

Решение:

Заметим, что если у n есть простой делитель $p<n$, то правая чать делится на p, а левая нет, чего быть не может. Следовательно, либо число n простое, либо $n=1$.

Разберем случай $n>5$. В этом случае $n-1=2l$, где $2<l<n-1$, потому $(n-1)!$ делится на $2\cdot l\cdot(n-1)=(n-1)^2$. Следовательно, $n^k-1=(n-1)(n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1)$ делится на $(n-1)^2$, поэтому $n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1$ делится на $n-1$. Так как n дает остаток 1 при делении на $n-1$, вся сумма сравнима с k по модулю $n-1$, откуда $k \geqslant n$. Но если $k \geqslant n$, то $n^k>(n-1)!+1$. Значит, случай $n>5$ невозможен.

Осталось разобраться с $n=1,2,3$ и 5. Проверка показывает, что случай $n=1$ невозможен; при $n=2$ и $n=3$ получаем $k=1$, а при $n=5$ — $k=2$.

5. Параллелепипед $a\times b\times c$ разбили на блоки вида $1\times1\times2$. Оказалось, что в разбиении поровну вертикальных, горизонтальных и продольных блоков. Для каких троек (a,b,c) такое возможно?

Ответ: Подходят все такие тройки (a,b,c), что abc делится на 12, и при этом $a\geqslant 2, b\geqslant 2, c\geqslant 2$.

Решение:

Докажем, что условия на тройки (a,b,c), указанные в ответе, должны быть выполнены. Обозначим за x количество вертикальных блоков в разбиении. Тогда всего блоков $3x$, их объём $6x = abc$. Таким образом, abc делится на 6.

Докажем теперь, что abc делится на 12, или, что то же самое, что x четное. Так как abc делится на 6, то хотя бы одно из чисел a,b,c четное. Можно считать, что a четное. Разобьем параллелепипед $a\times b\times c$ на ab параллелепипедов $1\times1\times c$ естественным образом (будем считать их вертикальными). Каждый из параллелепипедов разбиения покрасим либо полностью в белый, либо полностью в черный цвет так, чтобы любые два соседних по грани параллелепипеда были покрашены в разные цвета (иначе говоря, в шахматном порядке).

Теперь заметим, что каждый горизонтальный и каждый продольный блок $1\times1\times2$ содержит по одному кубику каждого из цветов, а каждый вертикальный блок содержит 2 кубика одного цвета. Всего черных и белых кубиков поровну (так как ab четно). В горизонтальных и продольных блоках черных и белых кубиков тоже поровну. Значит, вертикальных блоков из 2 белых кубиков столько же, сколько вертикальных блоков из черных кубиков, следовательно, x четно. Итак, abc делится на 12.

Теперь заметим, что если какое-то из чисел a,b,c равно 1, то количество блоков соответствующего направления равно 0, что очевидно не подходит под условие. Следовательно, должно быть выполнено условие $a\geqslant 2, b\geqslant 2, c\geqslant 2$.

Приведем примеры разбиения для всех таких параллелепипедов $a\times b\times c$, что abc делится на 12 и $a\geqslant 2, b\geqslant 2, c\geqslant 2$.

Назовем параллелепипеды $2\times2\times3$ и $4\times3\times3$ *базовыми*. Очевидно, что базовые параллелепипеды разбиваются на блоки требуемым образом, поэтому достаточно описать разбиение каждого параллелепипеда, подходящего под условия, на базовые.

Так как abc делится на 12, то одно из чисел a,b,c делится на 3. Не умаляя общности, пусть $c=3c'$.

1 случай: $a = 2a'$, $b = 2b'$. Тогда параллелепипед $2a' \times 2b' \times 3c'$ можно разбить на базовые параллелепипеды $2 \times 2 \times 3$.

2 случай: $a = 4a'$, b нечетное. Тогда параллелепипед $4a' \times b \times 3c'$ можно разбить на параллелепипеды $4a' \times (b-3) \times 3c'$ и $4a' \times 3 \times 3c'$. Осталось заметить, что первый параллелепипед разбивается на базовые вида $2 \times 2 \times 3$, а второй — на базовые вида $4 \times 3 \times 3$.

3 случай: $a = 2a'$, но a не делится на 4, b нечетное. Тогда $c = 6c''$ (так как abc делится на 12). Тогда параллелепипед $2a' \times b \times 6c''$ можно разбить на параллелепипеды $2a' \times (b-3) \times 6c''$ и $2a' \times 3 \times 6c''$. Параллелепипед $2a' \times (b-3) \times 6c''$ разбивается на базовые параллелепипеды $2 \times 2 \times 3$, а параллелепипед $2a' \times 3 \times 6c''$ — на несколько параллелепипедов $4 \times 3 \times 6c''$ и один параллелепипед $2 \times 3 \times 6c''$. Осталось лишь разбить $4 \times 3 \times 6c''$ на базовые $4 \times 3 \times 3$ и $2 \times 3 \times 6c''$ на (повернутые) базовые $2 \times 2 \times 3$.

4 случай: a и b нечетные, $c = 12c''$. Тогда параллелепипед $a \times b \times 12c''$ можно разбить на параллелепипеды размеров $(a-3) \times (b-3) \times 12c''$, $(a-3) \times 3 \times 12c''$, $3 \times (b-3) \times 12c''$ и $3 \times 3 \times 12c''$. Параллелепипед $(a-3) \times (b-3) \times 12c''$ разбивается на базовые $2 \times 2 \times 3$. Параллелепипеды $(a-3) \times 3 \times 12c''$ и $3 \times (b-3) \times 12c''$ — на (повернутые) базовые $2 \times 2 \times 3$. Параллелепипед $3 \times 3 \times 12c''$ разбивается на (повернутые) базовые $4 \times 3 \times 3$.

Примеры построены для всех случаев.