# Повторяем степень точки

**1.** **Важный факт.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузу $BC$ опущена высота $AH$. Тогда:

**a)** $AB^2 = BH \cdot BC$

**b)** $AH^2 = BH \cdot CH$

**2.** Обозначим за $I$ центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Перпендикуляр к прямой $AI$, восставленный в точке $I$, пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Точка $Q$ — основание проекции точки $I$ на прямую $AP$. Докажите, что четырехугольник $BQAC$ — вписанный.

**3.** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки $X$, $Y$, $Z$ и $T$, что $AX = 2$, $BX = 12$; $BY = 4$, $CY = 6$; $Z = 8$, $DZ = 3$; $DT = 1$ и $AT = 24$. Докажите, что четырехугольник $XYZT$ — вписанный.

**4.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Окружность, проходящая через точки $B$ и $C$, пересекает отрезок $AB$ в точке $X$, а отрезок $BD$ — в точке $Y$ . Докажите, что точки $A$, $D$ и точки, симметричные $X$ и $Y$ относительно середин отрезков $AB$ и $BD$ соответственно, лежат на одной окружности.

**5.** Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точки $P$ и $Q$ выбираются на его сторонах $BC$ и $AD$ так, что окружность $(APD)$ касается отрезка $BC$, а окружность $(BQC)$ — отрезка $AD$. Докажите, что прямая $PQ$ образует равные углы с прямыми $AD$ и $BC$.

**6.** **Полуописанная окружность.** В треугольник $ABC$ вписана окружность $\omega$, касающаяся его стороны $BC$ в точке $A_1$. Обозначим за $I_A$ центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны $BC$, а за $T \neq A_1$ — точку пересечения прямой $I_A A_1$ с $\omega$. Докажите, что окружности $(BTC)$ и $\omega$ касаются.