Направление на ...

Зафиксируем на плоскости некоторую прямую ℓ_0, которую будем называть *экватором*. Для любой другой прямой ℓ ее направлением $\widehat{\ell}$ мы будем называть направленный угол $\angle(\ell_0, \ell)$.

Естественным образом определим сумму и разность направлений, заимствуя операции из класса направленных углов.

Четверку направлений α, β, γ и δ мы будем называть *изогональной* (порядок важен!), если $\alpha+\gamma = \beta+\delta$.

Легко видеть, что свойство четверки направлений прямых быть изогональной не меняется при поворотах, симметриях и параллельных переносах.

1. Докажите, что для любых двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 выполенно $\angle(\ell_1, \ell_2) = \widehat{\ell_2} - \widehat{\ell_1}$.

2. Пусть четверка направлений прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 изогональна.

(a) Докажите, что если никакие три из этих прямых не проходят через одну точку, то они высекают вписанный четырехугольник.

(b) Докажите, что если три из этих прямых проходят через одну точку, а четвертая нет, то они высекают треугольник и касательную к описнной около него окружности в вершине.

(c) Докажите, что если все четыре прямые проходят через одну точку, то они образуют угол и две изогонали относительно него.

3. При помощи направлений объясните, почему в непрямоугольном треугольнике прямые, соединяющие вершину с ортоцентром и центром описанной окружности изогональны.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle YAC$. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABX, ABY, ACX, ACY лежат на одной окружности.

5. Через каждую вершину выпуклого четырехугольника провели по два луча внутрь четырехугольника: синий и красный, симметричные относительно биссектрисы соотвествующего угла. Оказалось, что синие лучи высекают вписанный четырехугольник. Докажите, что тогда тоже свойство верно и для красных лучей.

6. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

7. Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC.

8. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CD, DA описанного четырёхугольника $ABCD$ в точках K, L, M, N соответственно. Середины отрезков NK, KL, LM, MN обозначены через A_0, B_0, C_0, D_0 соответственно. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AC_0, BD_0, CA_0, DB_0 — вписанный.

9. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке R. Обозначим через M и N середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MRN касается прямой PR.

10. Медианы разрезали треугольник на 6 маленьких треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих шести маленьких треугольников лежат на одной окружности.