

Пятая точка

Задачи по пунктам НЕ принимаются!

1. Серединный перпендикуляр к BC пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Точки A и P лежат по одну сторону от прямой BC . Точка R является основанием перпендикуляра из точки P на прямую AC . Точка S — середина отрезка AQ . Пусть D — диаметрально противоположна A на окружности описанной около ABC . Докажите, что
 - (a) прямые PR и BD симметричны относительно серединного перпендикуляра к AQ ;
 - (b) точки A, B, R, S лежат на одной окружности.
2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На стороне AD нашлась точка P такая, что $\angle APC = 90^\circ$, $\angle ABP = 90^\circ$ и $BP \parallel CD$. Пусть M — середина PD . Докажите, что $\angle ACM = 90^\circ$.
3. Пусть I — центр вписанной окружности в остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$), а I_A — центр вписанной окружности, касающейся стороны BC . Пусть M — середина стороны BC , а N — середина дуги BAC описанной окружности ABC .
 - (a) Докажите, что $\angle ANI_A = \angle I_A MC$.
Точка T симметрична точке N относительно точки A .
 - (b) Докажите, что точки I_A, M, I, T лежат на одной окружности.
4. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Середины диагоналей AC и BD — M и N соответственно. Описанные окружности ADM и BCN пересекаются в точках L и P . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на окружности.
5. На сторонах AB, BC, AC остроугольного треугольника ABC точки C_1, A_1, B_1 выбраны так, что $A_1B = A_1C_1$ и $A_1C = A_1B_1$. Пусть I_1 — центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, и пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что точки B_1, C_1, I_1 и H лежат на одной окружности.