

## Пятая точка

Задачи по пунктам НЕ принимаются!

1. Серединный перпендикуляр к  $BC$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Точки  $A$  и  $P$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$ . Точка  $R$  является основанием перпендикуляра из точки  $P$  на прямую  $AC$ . Точка  $S$  — середина отрезка  $AQ$ . Пусть  $D$  — диаметрально противоположна  $A$  на окружности описанной около  $ABC$ . Докажите, что
  - (a) прямые  $PR$  и  $BD$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $AQ$ ;
  - (b) точки  $A, B, R, S$  лежат на одной окружности.
2. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . На стороне  $AD$  нашлась точка  $P$  такая, что  $\angle APC = 90^\circ$ ,  $\angle ABP = 90^\circ$  и  $BP \parallel CD$ . Пусть  $M$  — середина  $PD$ . Докажите, что  $\angle ACM = 90^\circ$ .
3. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности в остроугольный треугольник  $ABC$  ( $AB < AC$ ), а  $I_A$  — центр вписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Пусть  $M$  — середина стороны  $BC$ , а  $N$  — середина дуги  $BAC$  описанной окружности  $ABC$ .
  - (a) Докажите, что  $\angle ANI_A = \angle I_A MC$ .  
Точка  $T$  симметрична точке  $N$  относительно точки  $A$ .
  - (b) Докажите, что точки  $I_A, M, I, T$  лежат на одной окружности.
4. Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ . Середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  —  $M$  и  $N$  соответственно. Описанные окружности  $ADM$  и  $BCM$  пересекаются в точках  $M$  и  $L$ . Докажите, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на окружности.
5. На сторонах  $AB, BC, AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  точки  $C_1, A_1, B_1$  выбраны так, что  $A_1B = A_1C_1$  и  $A_1C = A_1B_1$ . Пусть  $I_1$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $A_1B_1C_1$ , и пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $B_1, C_1, I_1$  и  $H$  лежат на одной окружности.