Бьем по площадям

1. Точка X лежит на стороне BC остроугольного треугольника ABC. Пусть D и E — проекции X на AB и AC. Через точку A проведем прямую, симметричную прямой AX относительно биссектрисы угла BAC, и пусть эта прямая пересекает описанную окружность в точке Y. Докажите, что $S_{ADYE} = S_{ABC}$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади S точки M и N — середины диагоналей, P — пересечение AB и CD. Найдите S_{PMN}.

3. На основании BC трапеции $ABCD$ зафиксирована точка E. Постройте точку F на основании AD такую, чтобы в пересечении прямых AE, DE, BF, CF получился четырехугольник наибольшей площади.

4. Дан остроугольный треугольник ABC с центром O описанной окружности Ω. Внутри него отмечена точка P так, что $OP \parallel BC$. Прямые PB и PC пересекают окружность Ω вторично в точках X и Y. Докажите неравенство $S_{BOC} \geq S_{XPY}$.

5. На плоскости расположено нечетное количество городов так, что все попарные рсстояния между ними различны. Некоторые пары городов соединены (двусторонними) авиарсйсамн. Оказалось, что из каждого города выходят ровно два авиарсйса, причем это рейсы в два наиболее удаленных города. Докажите, что, используя авирейсы, из любого города можно добраться до любого другого.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть O_a,O_b,O_c,O_d — центры окружностей (DAB), (ABC), (BCD), (CDA) соответственно. Точки O_a,O_b,O_c,O_d являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что его площадь равна половине модуля разности площадей четырехугольников AO_bCO_d и BO_cDO_a.