Лемма Savoyamы and теорема Тебо

1. К окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 провели общую внутреннюю касательную A_1A_2 и общую внешнюю касательную B_1B_2 (A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_1, A_2 и B_2 принадлежат окружности с центром O_2). На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что

(a) прямая O_1O_2 — радикальная ось этих окружностей;

(b) точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2 лежит на прямой O_1O_2.

2. Дан треугольник ABC, точка I — центр его вписанной окружности и Ω — его описанная окружность. Пусть D на той дуге AC окружности Ω, что не содержит точки B. Окружность γ касается отрезка BC в точке K и окружности Ω в D.

(a) Точка S — пересечение прямой AI с BC. Докажите, что A, S, K и D лежат на одной окружности.

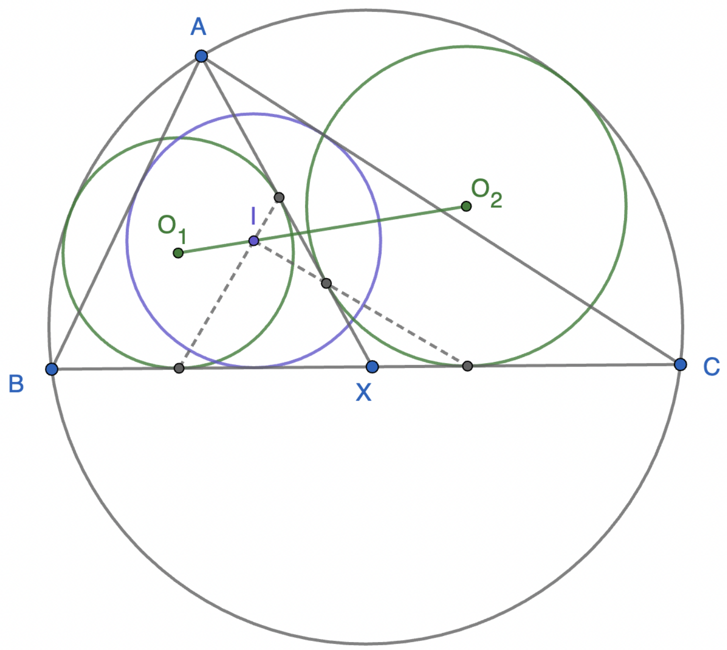
(b) Прямая IK пересекает γ в точке $L \neq K$. Докажите, что A, I, L и D лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC, точка I — центр его вписанной окружности и Ω — его описанная окружность. На стороне BC взята произвольная точка X.

(a) Лемма Саваямы. Пусть ω окружность, которая касается отрезков AX, XC и окружности Ω (такая окружность называется *вписанной в криволинейный треугольник* AXC). Пусть K и L — точки касания ω с AX и XC соответственно. Докажите, что прямая KL проходит через I.

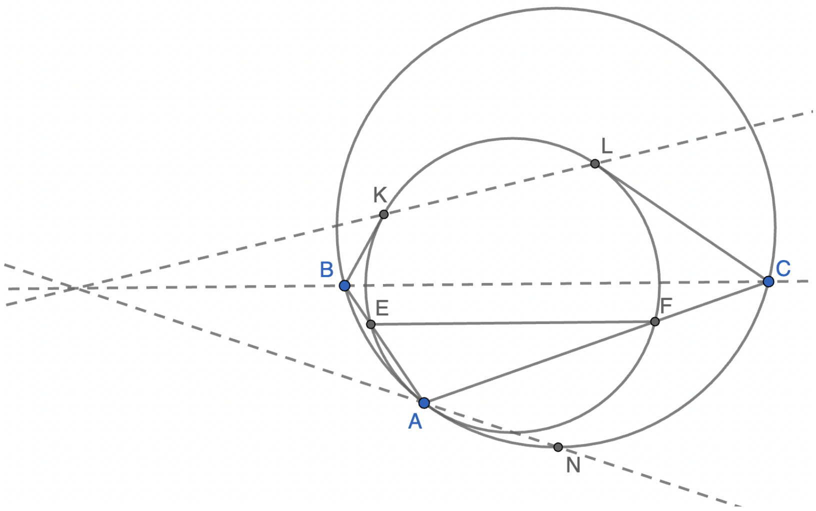
(b) Теорема Тебо. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка X. В криволинейные треугольники AXB и AXC вписано по окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей содержит I.

Такие окружности называются окружностями Тебо для точки X.



4. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка X. В сегмент AXB окружности, описанной около ABC, вписана окружность ω. Пусть K — точка касания ω и AX, L — точка касания ω и окружности, описанной около ABC. Пусть I_1 — инцентр ABX, I — инцентр ABC. Докажите, что A, K, I, I_1 и L лежат на одной окружности.

5. Дана окружность Ω и ее хорда BC. Окружность ω касается окружности Ω в A. Пусть отрезки AB и AC пересекают ω в точках E и F соответственно.



(a) Докажите, что $EF \parallel BC$.

(b) Докажите, что

$$\frac{\mathrm{pow}_\omega(B)}{\mathrm{pow}_\omega(C)} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

где $\mathrm{pow}_\Gamma(X)$ здесь и далее обозначает степень X относительно окружности Γ.

Пусть K и L на ω лежат по другую сторону от прямой BC, чем точка A. Известно, что BK и CL касаются ω. Пусть N середина той дуги BC окружности Ω на которой лежит точка A. Прямая AN пересекает BC в точке X.

(c) Докажите, что

$$\frac{XB}{XC} = \frac{BK}{LC}.$$

(d) **Лемма о луночках.** Докажите, что AN, KL и BC имеют общую точку.

6. **(a)** Докажите, что окружности Тебо касаются тогда и только тогда, когда X — основание биссектрисы треугольника ABC.

(b) Докажите, что окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда X — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

7. Хорды AB и CD окружности Γ пересекаются в точке P. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в сегменты APC и DPB окружности Γ (картинка на следующей странице).

(a) Пусть N середина той дуги AD окружности Γ, что не содержит точки C. Обозначим через I_1 и I_2 инцентры треугольников ACD и ABD. Докажите, что N лежит на серединном перпендикуляре к I_1I_2.

(b) Докажите, что N лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2.

(c) Докажите, что к окружностям ω_1 и ω_2 можно провести общую касательную, которая будет параллельна прямой AD.