

Всероссийская геометрия

1. Высоты остроугольного треугольника ABC ($AB < AC$) пересекаются в точке H . O — центр описанной около него окружности Ω . Отрезок OH пересекает описанную около треугольника BHC окружность в точке X , отличной от O и H . Окружность, описанная около треугольника AOX , пересекает меньшую дугу AB окружности Ω в точке Y . Докажите, что прямая XY делит отрезок BC пополам.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC . На отрезке AD отмечена точка E , а на отрезке CD — точка F . Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B, M, E, F лежат на одной окружности.
3. Остроугольный неравносторонний треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O , его высоты пересекаются в точке H . Через точку O проведена прямая, перпендикулярная AH , а через точку H — прямая, перпендикулярная AO . Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами AB и AC лежат на одной окружности, которая касается окружности ω .
4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Его диагонали пересекаются в точке E . Прямая l пересекает отрезки AB, CD, AE, ED в точках X, Y, Z, T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY равна диаметру окружности, описанной около треугольника ETZ .