# Сборы-сборы-сборы

**1.** Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружность проходит через точки $A$ и $D$ и касается отрезка $BC$ в точке $P$. Другая окружность проходит через точки $B$ и $C$ и касается отрезка $AD$ в точке $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ образует равные углы со с прямыми $AD$ и $BC$.

**2.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. Пусть $D$ — середина меньшей дуги $AC$ его описанной окружности. Точка $M$ — середина $BC$. Точка $K$ такова, что $BMKD$ — равнобокая трапеция ($MK \parallel BD$). Докажите, что $\triangle AKB$ — равнобедренный.

**3.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ сторона $AB$ — большее основание. Пусть $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, а $J$ — центр вневписанной окружности треугольника $ACD$, касающейся стороны $AD$ и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямые $IJ$ и $AB$ параллельны.

**4.** Пусть есть $2n+1$ точка общего положения, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Окружность назовем «половинчатой», если

**(a)** она проходит ровно через три точки из набора;

**(b)** строго внутри круга, граница которого – эта окружность, ровно $n-1$ точка.

Докажите, что есть по крайней мере $\frac{2n^2+n}{3}$ «половинчатых» окружностей.

**5.** Дан описанный четырехугольник $ABCD$, в котором $\sqrt{2}(BC - BA) = AC$. Точка $X$ — середина диагонали $AC$. Докажите, что $2\angle BXD = \angle DAB - \angle DCB$.

**6.** На боковых сторонах $AB$ и $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ выбраны точки $E$ и $F$ соответственно так, что $AE = BF$. Точка $B$ выбрана по ту же сторону от прямой $EF$, что и точка $A$, так что треугольники $DFE$ и $ABC$ подобны. Прямая $EF$ пересекает прямую $BC$ в некоторой точке $K$. Докажите, что прямая $DK$ касается описанной окружности $ABC$.