

Разнойбой

1. Внутри окружности ω , проходящей через точки A и B , отмечена точка C . На отрезке CB выбирается произвольная точка X . Луч AX вторично пересекает окружность ω в точке Y . Докажите, что в плоскости можно указать две такие точки, что окружность, описанная около треугольника CXY , проходит через них при любом выборе точки X .
2. Внутри угла с вершиной в точке O отмечена точка P . Как провести через P прямую, которая отсечет от угла треугольник (а) минимальной площади (б) минимального периметра?
3. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O . Прямая ℓ проходит через H и пересекает меньшие дуги AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности ω . Прямые $A'P$ и $A'Q$ пересекают BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки O, K, L и A' лежат на одной окружности.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM . На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D , что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC . Докажите, что $BC = BD$.
5. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Прямая AO вторично пересекает окружность ω в точке A' . M_B и M_C — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые $A'M_B$ и $A'M_C$ пересекают окружность ω вторично в точках B' и C' , а также пересекают сторону BC в точках D_B и D_C соответственно. Описанные окружности треугольников $CD_B B'$ и $BD_C C'$ пересекаются в точках P и Q . Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.
6. На плоскости расположен треугольник и три прямые, каждая из которых делит пополам и его площадь, и его периметр. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.
7. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности γ с центром I . Лучи BA и CD пересекаются в точке E , а лучи DA и CB — в точке F . Центры описанных окружностей треугольников AIB, BIC, CID и DIA лежат на окружности ω , а центры описанных окружностей треугольников AIE, EIC, CIF и FIA лежат на окружности Ω . Докажите, что центры окружностей γ, ω и Ω лежат на одной прямой.
8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что он является вписанным тогда и только тогда, когда $AB \cdot BC \cdot AC + AD \cdot DC \cdot AC = AB \cdot BD \cdot AD + BD \cdot DC \cdot BC$.