

Предсборная солянка

1. В пространстве отмечены шесть точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Докажите, что их можно разбить на две тройки, образующие зацепленные треугольники.
2. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Точки M и N — середины отрезков BH и CH . Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C .
4. Перпендикулярные диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P . Докажите, что проекции точки P на стороны четырехугольника образуют *вписанно-описанный* четырехугольник.
5. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Докажите, что прямая, проходящая через ортоцентры треугольников APD и BPC проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника в том и только в том случае, когда он является вписанным.
6. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Прямая AO вторично пересекает окружность ω в точке A' . M_B и M_C — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые $A'M_B$ и $A'M_C$ пересекают окружность ω вторично в точках B' и C' , а также пересекают сторону BC в точках D_B и D_C соответственно. Описанные окружности треугольников $CD_B B'$ и $BD_C C'$ пересекаются в точках P и Q . Докажите, что точки O , P и Q лежат на одной прямой.