По следам Санкт-Петербургской олимпиады

1. На столе лежат несколько неперекрывающихся пятирублевых монет, некоторые из которых касаются. Докажите, что все деньги можно раздать четырем олигархам так, что никто из не заберет касающиеся монеты.

2. На плоскости нарисовано выпуклое множество площади S и границей длины 1. Пусть существует хорда этого множества, которая делит попалам его периметр, но не площадь. Докажите, что в таком случае существует множество площади больше S (но необязательно выпуклое) длина границы которого также равна 1.

3. Треугольник ABC вписан в окружность. Из точек B и C одновременно выползают два муравья. Он ползут по дуге BC навстречу друг-другу так, что произведение расстояний от них до точки A остается неизменным. Докажите, что во время их движения (до момента встречи) прямая, проходящая через муравьёв, касается некоторой фиксированной окружности.

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагональ BE параллельна стороне CD. Кроме того, $\angle ABE = \angle ADB$ и $\angle ACE = \angle AEB$. Докажите, что точка A равноудалена от прямых BD и CE.

5. AH — высота остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность s. На отрезке BH выбрали точки D и E. На лучах AD и AE выбрали точки X и Y соответственно так, что середины отрезков DX и EY лежат на окружности s. Оказалось, что точки B, X, Y и C лежат на одной окружности. Докажите, что $BD + BE = 2CH$.

6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Точка E симметрична точке B относительно прямой AP. Отрезок PE пересекает описанную окружность треугольника ABP в точке D. Точка M —середина стороны AC. Докажите, что $DE + AC > 2BM$.

7. Дан вписанный шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$. Окружность ω вписана и в треугольник ABC, и в треугольник $A_1B_1C_1$ и касается отрезков AB и A_1B_1 в точках D и D_1 соответственно. Докажите, что если $\angle ACD = \angle BCD_1$, то $\angle A_1C_1D_1 = \angle B_1C_1D$.