Культурный счет в отрезках

1. Можно ли накрыть равносторонний треугольника двумя равносторонними треугольниками с меньшей стороной?

2. На плоскости провели n прямых так, что через точку пересечения любых двух прямых проходит еще хотя бы одна прямая. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

3. **Лемма.** Точки X, Y и Z спроецировали на стороны некоторого угла ортогональными проекциями, получив на одной стороне точки X_1, Y_1 и Z_1, а на другой — точки X_2, Y_2 и Z_2. Оказалось, что $\frac{X_1Y_1}{Y_1Z_1} = \frac{X_2Y_2}{Y_2Z_2}$. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

4. При помощи леммы докажите, что ортоцентр, центр описанной окружности и точка пересечения медиан любого треугольника лежат на одной прямой.

5. Окружность пересекает каждую сторону треугольника в двух точках. Точки покрашены в красный и синий цвета так, что на каждой стороне присутствуют точки обоих цветов. Оказалось, что прямые, соединяющие вершины треугольника с красными точками, лежащими на противолежащих сторонах, пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда и прямые, соединяющие вершины треугольника с синими точками, лежащими на противолежащих сторонах, пересекаются в одной точке.

6. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC соответственно. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр. Биссектриса угла BHC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q. Перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и AC в точках P и Q пересекаются в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

8. Дан переменный треугольник ABC, вписанная и описанная окружности которого зафиксированы. Точка A_1 симметрична точке A относительно I — центра вписанной в треугольник окружности, а точка A_2 изогонально сопряжена точке A_1. Докажите, что все такие точки A_2 лежат на радикальной оси точки I и окружности (ABC).