Классические идеи в КГ

1. Даны девять точек внутри единичного квадрата. Докажите, что некоторые три из них образуют треугольник, площадью не больше $\frac{1}{8}$.

2. Дано конечное множество S точек плоскости. Докажите, что либо все они лежат на одной прямой или существует прямая, содержащая ровно две точки из S.

3. Пусть n и k — целые положительные числа, и пусть S — набор из n точек плоскости такой, что никакие три точки S не лежат на одной прямой, и для каждой точки P из S существует не менее k точек S равноудаленных от P. Докажите, что $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4. На плоскости дано конечное число равных квадратов с параллельными сторонами таких, что среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что квадраты можно разделить не более чем на $2k-1$ не пустую группу так, что все квадраты одной группы имеют общую точку.

5. Пусть n — целое число, большее 1. Предположим, что $2n$ точек на плоскости расположены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Предположим, что n из $2n$ точек окрашены в синий цвет, а остальные n — в красный. Прямая на плоскости называется балансирующей, если она проходит через одну синюю и одну красную точку, и в каждой из двух полуплоскостей относительно этой прямой количество синих точек равно количеству красных точек в этой полуплоскости. Докажите, что существуют по крайней мере две балансирующие прямые.

6. Имеется n кругов радиуса один, расположенных в плоскости так, что площадь любого треугольника, образованного центрами трех таких кругов, не превосходит A. Докажите, что существует прямая, пересекающая хотя бы $\frac{n}{1+\sqrt{A}}$ этих кругов.