

Разнойой на дом

1. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Через точку L на этой окружности проводится прямая $\ell \parallel BC$. Прямая AL пересекает ω в точке $K \neq L$. Прямые BK и CA пересекают ℓ в точках N и M соответственно. Докажите, что $MN = ML$.
2. Обозначим за r и R радиусы вписанной и описанной около треугольника окружностей остроугольного треугольника соответственно, за r_a , r_b и r_c радиусы внеписанных окружностей, а за x , y и z длины отрезков, соединяющих центр описанной окружности с серединами сторон. Докажите следующие соотношения:
 - (a) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$
 - (b) $x + y + z = R + r$
3. Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Пусть точки D и E — центры вписанных окружностей треугольников APB и APC соответственно. Докажите, что прямые AP , BD и CE пересекаются в одной точке.

4. На плоскости зафиксированы прямые ℓ_1 и ℓ_2 , пересекающиеся в точке O . На прямой ℓ_2 фиксирована точка A , а вне прямых — точка B . Рассматриваются переменные точки $X \neq Y$ на прямой ℓ_1 такие, что углы XAO и YAO равны. Докажите, что центры всех окружностей (XBY) лежат на одной прямой.
5. Обозначим за ω_a внеписанную окружность треугольника ABC , касающуюся отрезка BC . Окружности (ABC) и ω_a пересекаются в точках X и Y . Касательные, проведенные в точках X и Y к ω_a , повторно пересекают окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что прямые, касающиеся (ABC) в точках P и Q , также касаются и окружности ω_a .
6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно DE . Докажите, что описанная окружность треугольника $A'DE$ касается описанной окружности треугольника ABC .