

Полярное соответствие

1. Как при помощи одной лишь линейки провести через данную точку P прямую, которая коснется данной окружности ω , если:
 - (a) Точка P лежит вне окружности.
 - (b) Точка P лежит на окружности.
2. Вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что касательные к описанной около него окружности в точках A и C пересекаются на прямой BD . Докажите, что касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC (или параллельны ей).

Эту задачу нужно решить при помощи полярного преобразования!
3. **Теорема.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые BC и AD — в точке Q , а прямые AC и BD — в точке R .
 - (a) Докажите, что прямая PQ — полярна точки R .
 - (b) Докажите, что прямая PR — полярна точки Q .
 - (c) Докажите, что ортоцентр треугольника PQR совпадает с центром описанной окружности четырехугольника.
4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω и описан около окружности ω .
 - (a) Докажите, что линия центров окружностей проходит через точку пересечения диагоналей этого четырехугольника.
 - (b) Предположим, что две окружности зафиксированы, а четырехугольник вращается, зажатый между ними. Докажите, что точка пересечения его диагоналей не меняется.
5. В треугольнике ABC прямая m касается вписанной окружности. Прямые, проходящие через центр вписанной окружности I и перпендикулярные AI , BI , CI , пересекают прямую m в точках A' , B' , C' соответственно. Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
6. На плоскости провели несколько прямых, среди которых нет параллельных. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит еще по крайней мере одна прямая. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.