

Линейное движение

Будем говорить, что точка X_t движется *линейно*, если ее декартовы координаты могут быть записаны как $(at + b, ct + d)$, где a, b, c, d — некоторые фиксированные числа, а t — переменное время.

Будем говорить, что прямая ℓ_t движется *линейно*, если существует такой фиксированный вектор \vec{v} , что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\ell_t = \ell_0 + t \cdot \vec{v}$ (где под прибавлением вектора подразумевается параллельный перенос на него). Аналогично можно определить линейное движение любого множества точек.

1. Вершины треугольника ABC движутся с течением времени. Выясните, обязательно ли движется линейно точка пересечения медиан, точка пересечения высот, центр описанной окружности и центр вписанной окружности этого треугольника, если:
 - (a) Стороны треугольника движутся линейно;
 - (b) Вершины треугольника движутся линейно;
 - (c) Вершины треугольника движутся линейно, причем существует такой момент времени, что $A = B$ и такой момент времени, что $A = C$.
2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .
3. При помощи линейного движения докажите, что точка пересечения медиан треугольника делит отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника и центр его описанной окружности, в отношении $2 : 1$.
4.
 - (a) Три линейно движущиеся точки три раза оказались на одной прямой. Докажите, что эти три точки всегда лежат на одной прямой.
 - (b) Четыре точки A, B, C и D движутся линейно. Прямые AC и BD три раза оказались перпендикулярны. Докажите, что они всегда перпендикулярны.
5. Четыре прямые общего положения высекают на плоскости четыре треугольника. При помощи линейного движения докажите, что:
 - (a) **Прямая Гаусса.** Середины трех диагоналей полного четырехсторонника лежат на одной прямой.
 - (b) **Прямая Обера.** Ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.
 - (c) Прямая Гаусса и прямая Обера перпендикулярны.
6. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая ℓ , перпендикулярная стороне BC , пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E . Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS .
7. В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D . Отрезок A_1D пересекает прямую, проходящую через точку A параллельно прямой BC , в точке K . Докажите, что четырехугольник B_1AKC_1 — вписанный.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что середины отрезков BY, CX, XY и PQ лежат на одной окружности.