Линейное движение

Будем говорить, что точка X_t движется *линейно*, если ее декартовы координаты могут быть записаны как $(at+b, ct+d)$, где a, b, c, d — некоторые фиксированные числа, а t — переменное время.

Будем говорить, что прямая ℓ_t *движется линейно*, если существует такой фиксированный вектор $\overrightarrow{v}$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\ell_t = \ell_0 + t \cdot \overrightarrow{v}$ (где под прибавлением вектора подразумевается параллельный перенос на него). Аналогично можно определить линейное движение любого множества точек.

1. Вершины треугольника ABC движутся с течением врмемени. Выясните, обязательно ли двиужется линейно точка пересечения медиан, точка пересечения высот, центр описанной окружности и центр вписанной окружности этого треугольника, если:

(a) Стороны треугольника движутся линейно;

(b) Вершины треугольника движутся линейно;

(c) Вершны треугольника движутся линейно, причем существует такой момент времени, что $A = B$ и такой момент времени, что $A = C$.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. При помощи линейного движения докажите, что точка пересечения медиан треугольника делит отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника и центр его описанной окружности, в отношении $2:1$.

4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются точке H. Прямая ℓ, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS.

5. Пусть прямые a, b и c пересекаются в точке O, по прямым a и b линейно движутся точки A и B соответственно. Окружность (A_tB_tO) повторно пересекается с прямой c в точке C. Докажите, что точка C движется линейно.

6. В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Отрезок A_1D пересекает прямую, проходящую через точку A параллельно прямой BC, в точке K. Докажите, что четырехугольник B_1AKC_1 — вписанный.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков BY , CX, XY и PQ лежат на одной окружности.

8. В четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. прямые AD, BC пересекаются в точке P. Точки O_1, O_2 — центры описанных окружностей, а точки H_1, H_2 — ортоцентры треугольников ABP, CPD. Докажите, что перпендикуляр из середины H_1O_1 на CD; из середины O_2H_2 на AB и прямая H_1H_2 пересекаются в одной точке.