

Изогонали и изогональное сопряжение

Определение. Прямые, проходящие через вершину угла называются *изогоналями* относительно этого угла, если они симметричны относительно его биссектрисы.

Определение. Точки P и Q называются *изогонально сопряжёнными* относительно треугольника ABC , если лучи AP и AQ , BP и BQ , CP и CQ являются изогоналями относительно соответствующих углов.

- (а) Внутри угла BAC лежит точка P . Точки P_b и P_c симметричны точке P относительно AB и AC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к P_bP_c является изогональю для прямой AP относительно угла BAC .

(б) Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что изогональ для PA относительно угла A и изогональ для PB относительно угла B параллельны.

(в) Докажите, что для точки P , не лежащей на описанной окружности треугольника ABC , существует изогонально сопряжённая точка.
- (а) Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.

(б) Какие точки изогонально сопряжены сами себе?

(в) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC . Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.
- (а) Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC . Опустим из них перпендикуляры на прямые AB , AC , BC . Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности.

(б) Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90^\circ$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB , BC , AC , и середина отрезка AC лежат на одной окружности.
- Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC , P — такая точка на прямой AC , что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD . Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.
- Теорема Паскаля.* На окружности расположены точки A, C, E, B, F, D в указанном порядке. Отрезки AB и DE пересекаются в точке X , отрезки AF и CD — в точке Y , отрезки BC и EF — в точке Z . Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.
- Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1 , точка I — центр этой окружности. Прямая, проходящая через точку A_1 перпендикулярно AA_1 , пересекает прямые BI и CI в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$.