

Разрезания на доминошки

1. Дана клетчатая фигура, покрашенная в шахматную раскраску. Известно, что в ней одинаковое количество клеток белого и чёрного цветов. Верно ли, что её можно разрезать на доминошки?
2. Доска 1000×1001 покрыта доминошками; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.
3. (а) Шахматную доску разрезали на доминошки. Докажите, что найдутся две доминошки, образующие квадрат 2×2 .
(б) Докажите, что при $n > 2$ количество разбиений клетчатой доски $n \times n$ на доминошки делится на 4.
4. (а) Можно ли из 18 доминошек выложить квадрат 6×6 так, чтобы любая прямая, параллельная сторонам квадрата, пересекала хотя бы одну доминошку?
(б) Можно ли замостить клетчатую плоскость доминошками так, чтобы каждая линия сетки пересекала бы конечное количество доминошек?
5. Прямоугольник покрыт в два слоя доминошками (то есть каждая клетка принадлежит ровно двум доминошкам). Докажите, что доминошки можно разбить на два непересекающихся множества, каждое из которых покрывает весь прямоугольник.
6. (а) Докажите, что существует прямоугольник со сторонами, большими 1000, который можно разбить на доминошки нечётным количеством способов.
(б) Докажите, что количество способов разбить доску $n \times (n + 1)$ на доминошки нечётно.
7. Из доски 9×9 вырезали клетку так, что оставшуюся часть можно разбить на доминошки. Докажите, что количество способов это сделать не зависит от того, какую именно клетку вырезать.