

Раскраска плоскости

Соглашение. Если в задаче говорится, что плоскость покрашена в n цветов, то имеется ввиду, что каждая точка окрашена в один из n цветов, причём каждым из этих n цветов покрашена хотя бы одна точка плоскости.

1. Плоскость покрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки
(а) одного цвета; (б) разных цветов,
расстояние между которыми равно 1.
2. Прямая покрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого покрашены в один и тот же цвет.
3. Можно ли раскрасить плоскость в три цвета так, чтобы любая прямая оказалась покрашена ровно в два цвета?
4. Плоскость покрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.
5. При каком наименьшем n полосу ширины 0,01 (то есть множество точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии 0,01) можно покрасить в n цветов так, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были покрашены в разные цвета?
6. Плоскость покрашена в три цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.
7. Плоскость покрашена в 1000 цветов. Докажите, что найдётся прямоугольник, вершины которого покрашены в один цвет.
8. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трёх цветов. Обязательно ли найдётся треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?