

## Поворотная гомотетия

1. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ .
  - (а) Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников  $PAC$  и  $PBD$  является центром поворотной гомотетии, переводящей  $A$  в  $C$ , а  $B$  в  $D$ .
  - (б) Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая  $A$  в  $C$ , а  $B$  в  $D$ .
2.
  - (а) По двум прямым, пересекающимся в точке  $P$ , с постоянными (но, возможно, неодинаковыми) скоростями движутся тараканы  $A$  и  $B$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $PAB$  проходят через фиксированную точку, отличную от  $P$ .
  - (б) Дан треугольник  $ABC$ , тараканы стартуют из точек  $B$  и  $C$  и движутся с одинаковыми скоростями по прямым  $AB$  и  $AC$  соответственно. Чем будет фиксированная точка из предыдущего пункта? Рассмотрите два случая направления движения тараканов.
3.
  - (а) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей  $A$  в  $C$ , а  $B$  в  $D$  совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей  $A$  в  $B$ , а  $D$  в  $C$ .
  - (б) Выведите из этого существование точки Микеля (четыре прямые общего положения в пересечении образуют четыре треугольника; описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке).
4. Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $Q$  проведена прямая, вторично пересекающая  $\omega_1$  в точке  $A$ , а  $\omega_2$  — в точке  $B$ .
  - (а) Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая  $\omega_1$  в  $\omega_2$ , а точку  $A$  в точку  $B$ , причем её центр находится в точке  $P$ .
  - (б) Докажите, что ГМТ середин отрезков  $AB$  — это окружность. Какая точка является центром этой окружности?
  - (в) Докажите, что существует точка, которая в каждый момент времени удалена на одинаковые расстояния от точек  $A$  и  $B$ .
5. Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от 1 до 5, причём в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.
6. Дан треугольник  $ABC$  и окружность с центром  $O$ , проходящая через вершины  $A$  и  $C$  и повторно пересекающая отрезки  $AB$  и  $BC$  в различных точках  $K$  и  $N$  соответственно. Окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $KBN$ , имеют ровно две общие точки  $B$  и  $M$ . Докажите, что угол  $OMB$  — прямой.
7. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AC < BC$ . Окружность проходит через точки  $A$  и  $B$  и пересекает отрезки  $CA$  и  $CB$  повторно в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C$  пересекаются повторно в точке  $P$ . Отрезки  $AB_1$  и  $BA_1$  пересекаются в точке  $S$ . Точки  $Q$  и  $R$  симметричны  $S$  относительно прямых  $CA$  и  $CB$ . Докажите, что точки  $P, Q, R, C$  лежат на одной окружности.