Диаметр вписанной окружности

Во всех задачах используются следующие обозначения. Дан треугольник ABC; I и r — центр и радиус его вписанной окружности; A_1, A_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной BC; X и Y — точки, диаметрально противоположные A_1 и A_2 во вписанной и вневписанной окружностях соответственно; A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, AC, AB соответственно; N — точка Нагеля; M — точка пересечения медиан.

Важный факт. Тройки точек A, A_2, X и A, A_1, Y лежат на одной прямой каждая.

1. **(а)** Докажите, что прямые A_0I и A_2M пересекаются в середине отрезка AA_1.
   (б) Докажите, что прямая A_0I высекает на высоте AH отрезок, равный r.
   (в) Докажите, что прямая A_2I делит высоту, опущенную из вершины A, пополам.

2. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно.
   (а) Докажите, что $AA_1 \parallel A_0I_a$.
   (б) Докажите, что прямые I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0 пересекаются в одной точке. (*Подсказка: треугольники с параллельными сторонами гомотетичны.*)
   (в) *(Прямая Нагеля).* Докажите, точки N, M, I лежат на одной прямой. Чему равно отношение $IM : MN$?
   (г) Докажите, что $AX = A_2N$.

3. В треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HA_1 параллельны.

4. Докажите, что центр положительной гомотетии, переводящей вписанную окружность треугольника в описанную, изогонально сопряжён точке Нагеля этого треугольника.

5. Про треугольник ABC известно, что $AB + AC = 3BC$. Докажите, что $IM = r/3$.