

## Шоу «Интуиция» от ММО

1. Можно ли число  $\frac{1}{10}$  представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа и  $p < q$ .)
2. Натуральные числа от 1 до 2022 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1011 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?
3. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата  $100 \times 100$ , соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток?
4. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?
5. Верно ли, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырехугольника?
6. В узлах сетки клетчатого прямоугольника  $4 \times 5$  расположены 30 лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек (размерами лампочек следует пренебречь, считая их точками), такую, что с какой-то одной стороны от неё ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода?
7. Можно ли, применяя к числу 2 функции

$\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}, \operatorname{arcsin}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$

в любом количестве и в любом порядке, получить число 2022?

8. Сумма цифр числа  $n$  равна 100. Может ли сумма цифр числа  $n^3$  равняться  $100^3$ ?
9. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?