Тренировочная олимпиада

1. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. Если в обгоне участвует велосипедист с фляжкой, то он передает её другому. (Моментов, когда двое обгоняют одного, не происходит). Может ли оказаться так, что, как долго бы ни ездили велосипедисты, у двух из них фляжка так и не побывает?

2. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения $\sin x = \sin[x]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC наименьшая. На отрезке AB выбрана точка P, а на отрезке AC — точка Q так, что $BQ = BC = CP$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке X. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентр треугольника ABC с точкой X, проходит через центр описанной окружности треугольника APQ.

4. Дана клетчатая полоса $1 \times N$ ($N > 1$). Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

5. Даны натуральные взаимно простые числа a и b. Таня написала на доске натуральное число $t < b$. Каждую секунду число x на доске заменяется на наименьшее натуральное из четырёх чисел $\{x - a, x + a, x - b, x + b\}$, которое ещё не появлялось на доске до этого. Докажите, что этот процесс будет продолжаться бесконечно долго, причём каждое натуральное число когда-нибудь будет выписано.