

Симметрия и не только

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.
2. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны.
3. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
4. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка E . Известно, что

$$\angle CAD = \angle ADC = \angle ABE = \angle DBE.$$

Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.

5. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45° . Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .
6. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE . Докажите, что если

$$\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ,$$

то треугольник ABC правильный.