Прыжки по кругу

В некоторых задачах (но не во всех) про расположение n точек по кругу бывает полезно приписать им остатки по модулю n и посмотреть на задачу с алгебраической точки зрения.

1. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 123 дерева — 61 сосна и 62 елки. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна.

2. Одиннадцать вершин правильного 25-угольника отмечены красным цветом. Обязательно ли найдутся три отмеченные точки, которые являются вершинами некоторого равнобедренного треугольника?

3. По кругу расположены 16 лунок, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из лунок. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из лунки, в которой он находится, на k лунок по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению). Сможет ли Петя играть так, чтобы через несколько ходов шарик гарантированно попал в отмеченную лунку?

4. Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой $2n$-звенной ломаной с вершинами во всех этих точках есть хотя бы два параллельных звена.

5. На доске нарисован правильный n-угольник, вершины которого занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Из картона вырезали такой же правильный n-угольник. Можно ли в вершинах картонного n-угольника расставить числа $1, 2, \ldots, n$ (каждое число — по одному разу) так, чтобы при любом наложении n-угольников в какой-то вершине оказались равные числа, если

(а) $n = 1001$ и картонный многоугольник можно только поворачивать;
(б) $n = 1001$ и многоугольник можно поворачивать и переворачивать;
(в) $n = 123$ и многоугольник можно поворачивать и переворачивать?

6. На окружности длины 123 отмечены 123 точки, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более чем на n, увеличилось?

7. Окружность разделена точками на n равных дуг, длину одной дуги примем за 1. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке. При каких n кузнечик посетит все отмеченные точки?

8. n красных и n синих точек, строго чередуясь, разделили окружность на $2n$ дуг так, что каждые две смежные из них имеют различную длину. При этом длины каждой из этих дуг равны одному из трёх чисел: a, b или c. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные площади.