Непростая индукция

1. Докажите, что при $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных делителей числа $n!$.

2. Докажите, что для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n.

3. Дан связный граф с n вершинами. В каждой его вершине есть сколько-то монет. Разрешается за одну операцию переложить сколько угодно монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что можно за $n - 1$ операцию получить любое другое наперёд заданное расположение монет.

4. На доске написана единица и девять нулей. Можно стереть два числа и записать на доску два числа, равных их среднему арифметическому. Какое наименьшее ненулевое число можно получить?

5. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

6. В группе детского сада каждый ребёнок принёс с собой несколько конфет: первый — 1 конфету, второй — 2 конфеты, ..., сотый — 2^{99} конфет. Злая воспитательница предложила разделить конфеты «по справедливости». Воспитательница может подойти к любым двум детям и разделить их конфеты между ними пополам. Если при этом у них суммарно нечётное количество конфет, то одну конфету она съедает. Воспитательница продолжает так делать, пока у всех детей не станет поровну конфет. Какое наибольшее количество конфет может съесть воспитательница?

7. На плоскости даны n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что существует n-звенная несамопересекающаяся ломаная, имеющая по одному звену на каждой прямой.

8. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

9. В таблице 100×100 расставлены действительные числа. В каждом столбце подчеркнули m наибольших чисел, а в каждой строке — n наибольших чисел. Докажите, что по крайней мере mn чисел подчёркнуты дважды.