

## Арифметика остатков

1. Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  число  $(2^n - 1)^n - 3$  делится на  $2^n - 3$ .
2. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, т. е. простых чисел вида  $4k + 3$ . То же для простых чисел вида  $6n + 5$ .
3.  $(a, b, c)$  — пифагорова тройка ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$ ). Докажите, что  $abc \div 60$ .
4.  $p$ ,  $p + 10$  и  $p + 14$  — простые числа. Найдите  $p$ .
5.  $p$ ,  $4p^2 + 1$ ,  $6p^2 + 1$  — простые числа. Найдите  $p$ .
6. Докажите, что  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком целом  $n$ .
7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы **(а)** двух **(b)** трех квадратов целых чисел.
8. Доказать, что нет такого числа в последовательности 11, 111, 1111, 11111, ..., которое является квадратом целого числа.