Египетские дроби

Будем называть *египетской* дробь вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число.

1. Дано натуральное $n > 1$.
(а) Найдите какое-нибудь представление дроби $\frac{1}{n}$ в виде суммы двух различных египетских дробей.
(б) Для каких n такое представление единственно (с точностью до перестановки слагаемых)?

2. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

3. Докажите, что
$$1 = \frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_4} + \ldots + \frac{1}{f_n f_{n+2}} + \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}},$$
где f_k — последовательность чисел Фибоначчи ($f_1 = f_2 = 1$, $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ для натуральных k).

4. Рассмотрим все пары чисел p и q такие, что $0 < p < q \leqslant n$, $p + q > n$, p и q взаимно просты. Докажите, что сумма дробей $\frac{1}{pq}$ для всех таких пар равна $\frac{1}{2}$.

5. Сумма 100 обратных величин попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 10000?

6. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы нескольких попарно различных египетских дробей.

7. Сумма n египетских дробей равна 1. Докажите, что знаменатели этих дробей не превосходят n^{2^n}.

8. Дана арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Докажите, что из неё можно выбрать несколько (конечное количество) чисел так, что сумма обратных к ним величин была бы равна 1.