

Усиление индукции

1. Докажите, что сумма $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ является точным квадратом.
2. Докажите, что $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.
3. На плоскости даны n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что существует n -звенная несамопересекающаяся ломаная, имеющая по одному звену на каждой прямой.
4. Докажите, что если $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, то уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 1$ разрешимо в целых числах.
5. Назовём натуральное число ровным, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n -значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.