

Индукция

1. Докажите неравенство: $2^n > n$.
2. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом натуральном n .
3. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4 \dots B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, ..., $A_nA_1 = B_nB_1$ и $n - 3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?
4. Из клетчатого квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали какую-то одну клетку. Докажите, что получившуюся фигуру можно замостить уголками из трёх клеток (см. рис.).



5. Докажите, что число $\underbrace{111 \dots 111}_{3^n \text{ единичек}}$ делится на 3^n .
6. Докажите, что для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n . (Например, на 2 делится 2, на 4 делится 12, на 8 делится 112, на 16 делится 2112...)
7. Юра написал на доске последовательность U длины 2022 из нулей и единиц. Андрею не нравится Юрина последовательность, и он хочет получить из нее последовательность A , тоже длины 2022 из нулей и единиц. Для этого он может применять два действия:
 - заменять первую цифру последовательности (ноль на единицу и наоборот);
 - заменять цифру, стоящую после первой единицы в последовательности.Докажите, что Андрей сможет получить последовательность A .
8. Виктор Дмитриевич отправился в путешествие в Казахстан. Он решил проехать на машине по замкнутой трассе, проходящей по пустыне. Вдоль трассы расположены n бензоколонок, в каждой из которых есть некоторое количество бензина. Известно, что суммарного количества бензина в бензоколонках хватит на то, чтобы проехать полный круг. Докажите, что найдется такая бензоколонка, что, начав поездку около нее и заправляясь по пути, Виктор Дмитриевич сможет проехать полный круг.