

Бесконечность — не предел!

Странный это был отдел. Лозунг у них был такой: «Познание бесконечности требует бесконечного времени». С этим я не спорил, но они делали из этого неожиданный вывод: «А потому работай не работай — все едино». И в интересах неувеличения энтропии Вселенной они не работали.

Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

Простой, но важный для осознания факт: бесконечно много \neq сколь угодно много.

1. Докажите, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много подряд идущих составных чисел. Правда ли, что найдётся бесконечно много составных подряд идущих чисел?
2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Сможет ли Леонардо существовать сколь угодно долго? А бесконечно долго?
3. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?
4. Натуральные числа разбили на несколько арифметических прогрессий, разности которых равны d_1, d_2, \dots
 - (а) Пусть прогрессий конечное число. Докажите, что $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots = 1$.
 - (б) Верно ли утверждение предыдущего пункта, если прогрессий бесконечное число?
5. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста.
 - (а) Пусть рост каждого богатыря составляет натуральное число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.
 - (б) Пусть рост каждого богатыря не обязательно является целым. Докажите, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

Следующие задачи показывают, когда из того, что существует сколь угодно длинная последовательность, удовлетворяющая некоторым свойствам, следует, что существует бесконечная последовательность, удовлетворяющая этим свойствам. Ключевой для осознания является следующая задача, а именно осознание, что значит «в итоге», и почему так вообще корректно говорить.

6. Всеволод и Максим по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Всеволод своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, а Максим — одну. Если в итоге получится чисто периодическая дробь (без предпериода), выигрывает Всеволод, иначе — Максим. Кто имеет выигрышную стратегию?
7. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный путь.
8. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются словами. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов. Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
9. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета (то есть так, чтобы любые две страны, имеющие общий кусок границы ненулевой длины, были покрашены в разные цвета). Докажите, что тогда и бесконечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета.