Зацикливание и периодичность

1. **(а)** На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, начав из какой-то точки и двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнёшь ходить по циклу.
(б) Докажите, что если дополнительно в каждую из точек ведёт ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадёшь в неё снова.

2. Докажите, что если у бесконечной последовательности есть периоды с длинами m и n, то у неё есть период длины НОД(m, n).

3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырёх. Докажите, что последовательность периодическая (возможно, с предпериодом), причём длина периода не больше **(а)** 10000; **(б)** 625.

4. Кубик Рубика выведен из собранного состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что его можно вернуть в собранное состояние, выполнив эту комбинацию ещё несколько раз.

5. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1-|1-2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (возможно, с предпериодом) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

6. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – чисто периодические последовательности действительных чисел с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

7. Периоды двух последовательностей действительных чисел без предпериода равны 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?

8. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями: некоторые по часовой стрелке, а некоторые против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.

9. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая?

10. Дана бесконечная вправо последовательность букв русского алфавита. Известно, что в ней различных подслов длины 100 столько же, сколько различных подслов длины 101. Докажите, что последовательность периодична, возможно, с предпериодом.