

Гидроксид геометрии

В треугольнике ABC отмечены центр описанной окружности O и ортоцентр (точка пересечения высот) H .

Лемма 1. Прямые AO и AH переходят друг в друга при симметрии относительно биссектриссы угла A .

- (а) Докажите лемму 1 для остроугольного треугольника.
- (б) Докажите лемму 1 для тупоугольного треугольника с тупым углом A .
- (в) Докажите лемму 1 для тупоугольного треугольника с острым углом A .

Лемма 2. Верно векторное равенство $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

- (а) Докажите, что $\overline{OB} + \overline{OC} \perp BC$.
 - (б) Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OH} \perp BC$.
 - (в) Докажите лемму 2.
- (а) Пусть M — середина BC . Докажите, что $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$.
 - (б) Пусть фиксированы точки B и C и окружность, через них проходящая, а точка A бегает по этой окружности. Найдите кривую, по которой бегает H .

И ещё.

- (а) Точку H отразили относительно стороны BC и получили точку A_0 . Докажите, что A_0 лежит на описанной окружности ABC .
- (б) Точку H отразили относительно середины стороны BC и получили точку A_1 . Докажите, что A_1 лежит на описанной окружности ABC , причем AA_1 — диаметр.

И задачи.

- Восстановите треугольник по данным A , O и H . (Сколько решений в зависимости от расположения точек?)
- Проведем высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что прямая AO содержит высоту треугольника AB_1C_1 , а прямая AH содержит центр описанной окружности этого треугольника.
- В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Перпендикуляр, опущенный из B на прямую AD , пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E , отличной от B . Докажите, что точки A , E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.
- Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .